

Probabilité et Mesures - Examen d'Albert Tarantola

Marie Pétronille, Master 2 Recherche IPG-Paris 7

Janvier 2005

Nous sommes confrontés à une version plus simple d'une expérience de tomographie par rayons X. Le but de ce problème inverse va consister à établir un modèle valide permettant de mieux connaître les valeurs de la fonction $m(x,y)$ en mesurant les paramètres observables d_{obs}^i .

Nous utiliserons pour cela la théorie linéaire des moindres carrés qui nous permettra d'obtenir l'information à posteriori sur les paramètres du modèle ainsi que les incertitudes à posteriori.

0.1 Première question

Nous nous proposons dans un premier temps d'explicitier la matrice G (22×16) telle que la relation linéaire paramètres observables-paramètres du modèle est donnée par :

$$d^i = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=16} G^i_{\alpha} m^{\alpha} \quad , \quad (1)$$

soit

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{m} \quad , \quad (2)$$

G^i_{α} correspondant à la longueur du rai i ($1 < i < 22$) dans le bloc α ($1 < \alpha < 16$).

Ainsi, puisque la longueur des côtés de chaque bloc est de 1 cm, la longueur d'un rai vertical ou horizontal dans un bloc sera de 1 cm, tandis qu'elle sera de $\sqrt{2}$ cm pour un rai diagonal.

La matrice G ainsi obtenue est :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0.2 Deuxième question

Il s'agit maintenant d'estimer les valeurs des paramètres m^{α} , c'est-à-dire pour exprimer l'information à posteriori sur le modèle. Sachant que dans notre cas la densité de probabilité à posteriori pour les paramètres est une gaussienne (incertitudes indépendantes), on peut calculer sa moyenne d'après la théorie linéaire des

moindres carrés en utilisant l'une des trois expressions équivalentes :

$$\tilde{m} = (G^t C_D^{-1} G + C_M^{-1})^{-1} (G^t C_D^{-1} d_{obs} + C_M^{-1} m_{prior}) \quad (3)$$

$$= m_{prior} + (G^t C_D^{-1} G + C_M^{-1})^{-1} G^t C_D^{-1} (d_{obs} - G m_{prior}) \quad (4)$$

$$= m_{prior} + C_M G^t (G C_M^{-1} G^t + C_D^{-1})^{-1} (d_{obs} - G m_{prior}) \quad (5)$$

avec :

- d_{obs} = valeurs observées pour les paramètres d , avec des incertitudes à priori d'écart type σ_D décrites par une matrice de covariance C_D diagonale, telle que $C_D = \sigma_D^2 I$.
- m_{prior} = valeurs à priori pour les paramètres m , avec des incertitudes d'écart type σ_M décrites par une matrice de covariance C_M diagonale, telle que $C_M = \sigma_M^2 I$.

L'expression de la covariance à postérieure qui nous servira par la suite est quant à elle donnée par l'une des deux expressions équivalentes :

$$\tilde{C}_M = (G^t C_D^{-1} G + C_M^{-1})^{-1} \quad (6)$$

$$= C_M - C_M G^t (G C_M^{-1} G^t + C_D^{-1})^{-1} G C_M \quad (7)$$

0.3 Troisième question

Nous avons obtenu la matrice carrée (4×4) suivante :

$$\tilde{m} = \begin{pmatrix} 6.0908 & 3.8681 & 4.0021 & 4.0064 \\ 6.0508 & 3.9657 & 4.9266 & 3.8894 \\ 5.8560 & 4.0506 & 4.0976 & 4.1904 \\ 6.1539 & 4.1723 & 4.8020 & 4.9131 \end{pmatrix}$$

Cette solution sera plus facilement visualisée par une représentation en couleur comme le montre la figure 1.

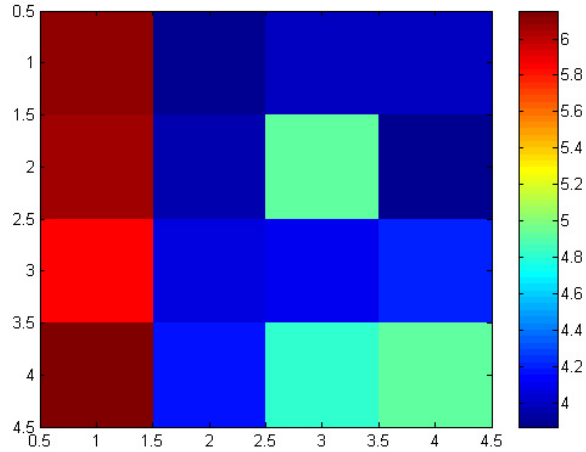


FIG. 1 – Représentation de l'information à postérieure pour le modèle à 22 rais.

0.4 Quatrième question

En plus de nous fournir l'information à postérieure sur les paramètres du modèle, la théorie des moindres carrés nous fournit les incertitudes sur le modèle à postérieure. Celles-ci correspondent aux valeurs des racines carrées des éléments diagonaux de la matrice de covariance \tilde{C}_M (voir équation 6).

Nous pouvons dans un premier temps remarquer que cette matrice de covariance à postérieure n'est pas la même que la matrice (16×16) de covariance à priori C_M donnée par :

$$\mathbf{C}_M = \begin{pmatrix} 9 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 9 \end{pmatrix}$$

Les figures 2 et 3 ci-après montrent respectivement C_M et \tilde{C}_M .

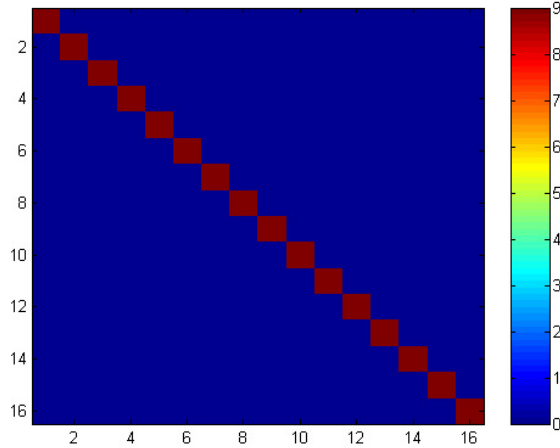


FIG. 2 – Représentation des incertitudes à priori pour le modèle à 22 rais.

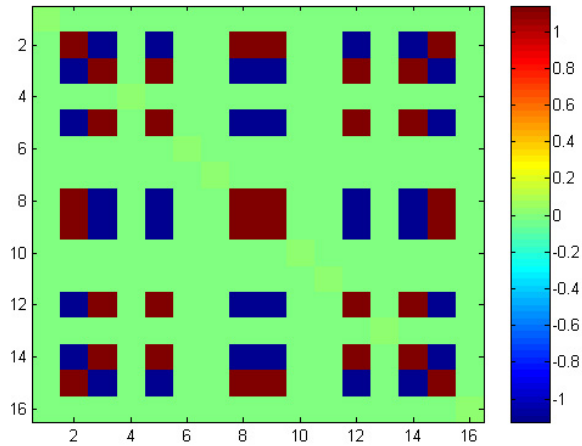


FIG. 3 – Représentation des incertitudes à postériori pour le modèle à 22 rais.

Nous remarquons que la matrice \tilde{C}_M est symétrique et qu'elle montre des valeurs maximales, minimales ou nulles des incertitudes à postériori. Nous constatons parfois que là où nous avons des incertitudes à priori, nous n'avons pas d'incertitudes à postériori et inversement. De plus, nous pouvons remarquer que sur le carré formé des 16 blocs, les blocs deux diagonales montrent des incertitudes nulles alors que les huit autres blocs montrent des incertitudes maximales. Cette distribution particulière des incertitudes à postériori semble pouvoir se résoudre en choisissant le nombre de rais utilisés. En effet, il semblerait que ceci puisse modifier notre modèle de façon à affiner les incertitudes sur tel ou tel bloc (voir les deux questions suivantes). Nous verrons que l'utilisation d'un maximum de rais sur un bloc permet de minimiser aussi bien que possible les incertitudes à postériori.

0.5 Cinquième question

Supprimons maintenant les données correspondant aux rais 07, 11, 15 et 19. Pour cela, nous avons décidé d'attribuer de façon artificielle de grosses incertitudes sur les données associées à ces quatre rais, soit par exemple une incertitude de 1000 sur la covariance C_D pour chacun de ces rais. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 4.

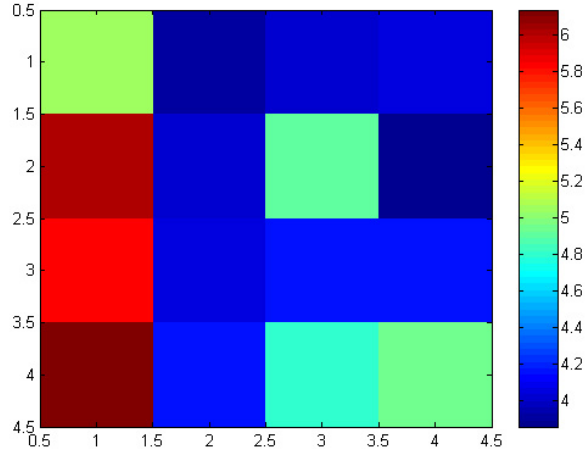


FIG. 4 – Représentation de l'information à postériori après avoir supprimé les rais 07, 11, 15 et 19.

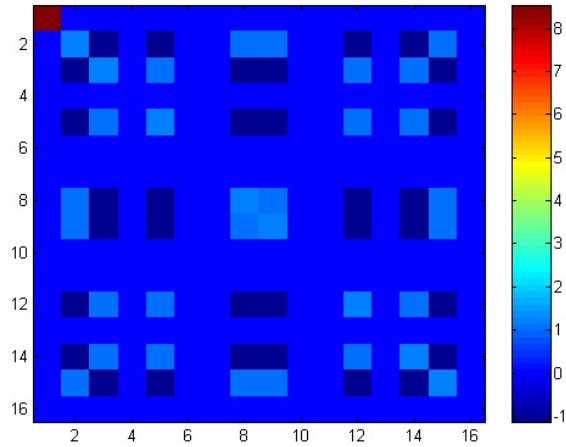


FIG. 5 – Représentation des incertitudes à postériori après avoir supprimé les rais 07, 11, 15 et 19.

Nous pouvons constater que la suppression des données associées à ces quatre rais affecte essentiellement la valeur de l'information à postériori pour le bloc 01. En effet, nous avons en réalité supprimé la totalité des données qui portaient l'information sur ce bloc. Dans ce cas, l'information à postériori est la même que l'information à priori pour ce bloc.

Ceci est en relation avec le fait que la matrice de covariance \tilde{C}_M associée à ce nouveau problème ne soit pas symétrique. Nous constatons en effet que l'incertitude à postériori pour le bloc 01 est maximale alors que pour le reste des blocs elle varie de l'un à l'autre comme à la question précédente (Figure 5).

Pour résumer, l'information à postériori sur le bloc 01 correspond à l'information à priori, sans changer la covariance \tilde{C}_M , soit $m^1 = 5cm^{-1} \pm 0.0247cm^{-1}$.

0.6 Sixième question

Pour finir, supprimons les données correspondant aux rais 02, 05, 08, 10, 13, 16, 19, et 22. Nous avons procédé de la même façon que pour la question précédente. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure 6.

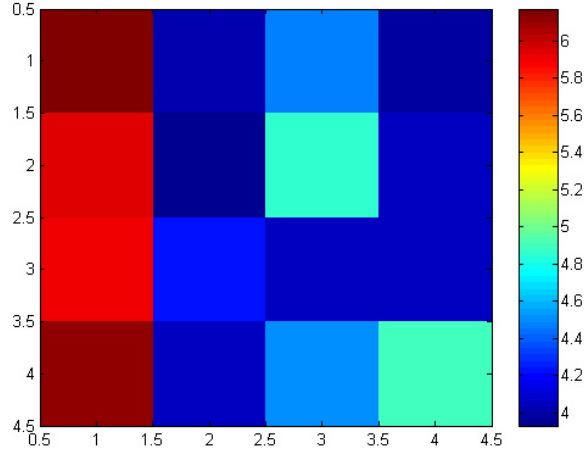


FIG. 6 – Représentation de l’information à postériori après avoir supprimé les rais 02, 05, 08, 10, 13, 16, 19 et 22.

Dans ce cas, nous constatons que le modèle à postériori obtenu est relativement proche du modèle à postériori visualisé quand les données des 22 rais sont utilisées (voir la deuxième question). Ceci s’explique par le fait que la quasi totalité des blocs (sauf le 07 et le 11) sont traversés par au moins un des rais que l’on supprime. Supprimer autant de rais revient donc presque à ne supprimer aucun rai.

Cependant ces deux modèles à postériori ne sont pas identiques et quelques différences relativement importantes existent, notamment pour les blocs 3 et 15. Chacun de ces deux blocs est traversé par trois rais différents que l’on supprime. La matrice de covariance \tilde{C}_M obtenue (Figure 7) montre en effet de fortes incertitudes à postériori pour ces deux blocs. De plus, on peut dire qu’ils sont corrélés puisque ces deux blocs montrent les mêmes valeurs de covariance.

Notons aussi des incertitudes relativement élevées pour les blocs 8 et 12, chacun traversé par deux rais que l’on supprime. Ces deux blocs semblent aussi être corrélés. Il en est de même pour les blocs 2, 5 et 14. Pour tous les autres blocs, les faibles valeurs de covariance montrent qu’ils ne sont pas corrélés.

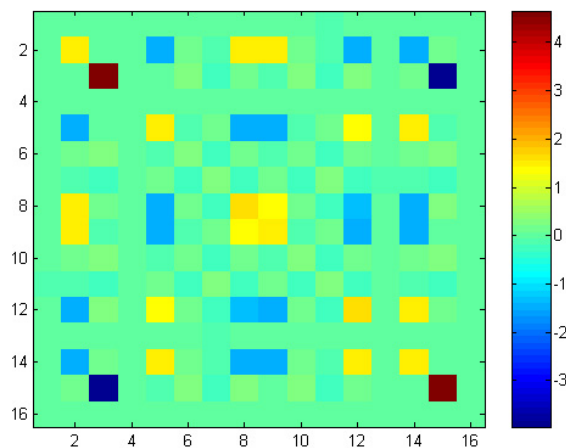


FIG. 7 – Représentation des incertitudes à postériori après avoir supprimé les rais 02, 05, 08, 10, 13, 16, 19 et 22.

On peut donc déduire de tout ceci que le fait d'utiliser un maximum de rais pour un bloc permet d'affiner et de minimiser au mieux l'incertitude à postériori sur le modèle pour ce bloc. C'est donc ce genre de modèle ici qui interprète le mieux les données.

0.7 Annexes : code Matlab

Début du programme

```
clear all; clc;
```

Paramètres observables (données)

```
dobs = [6.9; 12.7; 17.2; 27.1; 19.6; 14.1; 8.7; 17.1; 17.9; 16.1; 24.2; 5.6; 11.1; 18.3; 26.9; 21.0;
14.1; 8.6; 17.9; 18.8; 18.2; 20.1]
```

Covariance des données

```
CD = 0.32 * eye(22, 22)
```

Information à priori

```
mprior(1 : 16, 1) = 5
```

Covariance de l'information à priori

```
CMprior = 32 * eye(16, 16)
```

Première question : Ecriture de la matrice G

```
a = sqrt(2)
```

```
G = [0000000000000000a
00000000000a00a0
0000000a00a00a00
000a00a00a00a000
00a00a00a0000000
0a00a00000000000
a000000000000000
0001000100010001
0010001000100010
0100010001000100
1000100010001000
000a000000000000
00a0000a00000000
0a0000a0000a0000
a0000a0000a0000a
0000a0000a0000a0
00000000a0000a00
00000000000a000
1111000000000000
0000111100000000
0000000011110000
000000000001111]
```

Deuxième question : Evaluation de l'information à postériori

Théorie linéaire des moindres carrés

$$m = \text{inv}(G' * \text{inv}(CD) * G + \text{inv}(CMprior)) * (G' * \text{inv}(CD) * dobs + \text{inv}(CMprior) * mprior)$$

Covariance de l'information à postériori

$$CM = \text{inv}(G' * \text{inv}(CD) * G + \text{inv}(CMprior))$$

Troisième question : Représentation couleur de l'information à postériori

```
n = [m(1, 1)m(2, 1)m(3, 1)m(4, 1)
```

$m(5,1)m(6,1)m(7,1)m(8,1)$
 $m(9,1)m(10,1)m(11,1)m(12,1)$
 $m(13,1)m(14,1)m(15,1)m(16,1)]$

imagesc(n)

colorbar

Cinquième question : Suppression des rais 07, 11, 15 et 19

Covariance des données

$$CD = 0.3^2 * eye(22,22)$$

Grosse incertitude attribuée artificiellement sur les données de ces rais

$$CD(7,7) = 1000$$

$$CD(11,11) = 1000$$

$$CD(15,15) = 1000$$

$$CD(19,19) = 1000$$

Théorie linéaire des moindres carrés

$$m = inv(G' * inv(CD) * G + inv(CMprior)) * (G' * inv(CD) * dobs + inv(CMprior) * mprior)$$

Covariance de l'information à postériori

$$CM = inv(G' * inv(CD) * G + inv(CMprior))$$

Représentation couleur de l'information à postériori

$$n = [m(1,1)m(2,1)m(3,1)m(4,1)$$

$$m(5,1)m(6,1)m(7,1)m(8,1)$$

$$m(9,1)m(10,1)m(11,1)m(12,1)$$

$$m(13,1)m(14,1)m(15,1)m(16,1)]$$

imagesc(n)

colorbar

Sixième question : Suppression des rais 02, 05, 08, 10, 13, 16, 19 et 22

Covariance des données

$$CD = 0.3^2 * eye(22,22)$$

Grosse incertitude attribuée artificiellement sur les données de ces rais

$$CD(2,2) = 1000$$

$$CD(5,5) = 1000$$

$$CD(8,8) = 1000$$

$$CD(10,10) = 1000$$

$$CD(13,13) = 1000$$

$$CD(16,16) = 1000$$

$$CD(19,19) = 1000$$

$$CD(22,22) = 1000$$

Théorie linéaire des moindres carrés

$$m = inv(G' * inv(CD) * G + inv(CMprior)) * (G' * inv(CD) * dobs + inv(CMprior) * mprior)$$

Covariance de l'information à postériori

$$CM = inv(G' * inv(CD) * G + inv(CMprior))$$

Représentation couleur de l'information à postériori

$$n = [m(1,1)m(2,1)m(3,1)m(4,1)$$

$$m(5,1)m(6,1)m(7,1)m(8,1)$$

$$m(9,1)m(10,1)m(11,1)m(12,1)$$

$$m(13,1)m(14,1)m(15,1)m(16,1)]$$

imagesc(n)

colorbar